Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Física
FIS1533 - Electricidad y Magnetismo
Profesor: Máximo Bañados
Ayudante: Alonso Ruiz (airuiz@uc.cl)

Ayudantía 12

Problema 1

Considere 2 placas conductoras de área A y separadas una distancia d. Entre las placas se colocan 2 materiales de conductividades y permitividades σ_1, ϵ_1 y σ_2, ϵ_2, tal como se muestra en la figura 1. Entre las placas se establece una diferencia de potencial V_0, con la placa inferior a potencial mayor. Encuentre:

a) La resistencia del sistema.

b) La densidad de cargas en la interfaz de los materiales. (Desprecie efectos de borde).

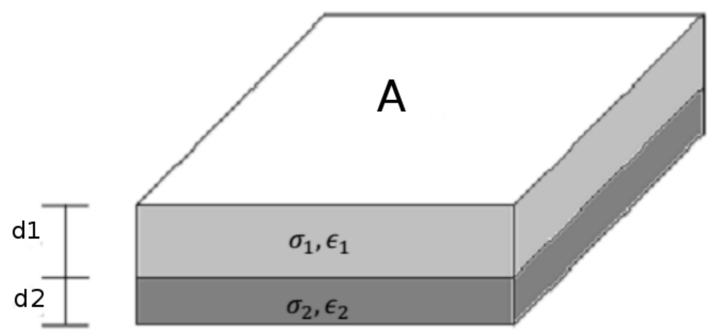

Figura 1:

Solución

a) Para calcular la resistencia podemos ocupar $R = V/I$, donde V e I van a estar dados por:

$$I = \int \vec{j} \cdot d\vec{S} \qquad V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{S} \qquad \vec{j} = \sigma \vec{E} \tag{1}$$

Dado que el sistema esta conectado a una fuente de potencial todo el tiempo, la carga que entra es la misma que la sale, por lo tanto el sistema esta en un régimen estacionario, es decir que se cumple que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \tag{2}$$

Dado que las cargas fluyen desde la placa de mayor potencial (inferior) a la de menor potencial, entonces se tiene que la corriente va a venir dada por $\vec{j} = j(x)\hat{x}$, donde el eje x se orientó hacia arriba. Usando la ecuación anterior se tiene:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = \frac{\partial j(x)}{\partial x} = 0 \tag{3}$$

Por lo tanto $\vec{j} = j\hat{x}$ con $j = cte$. Con esto se puede determinar la corriente con (1), donde la superficie para integrar es un plano paralelo a las placas y con área A, por lo tanto $d\vec{S}//\vec{j}$:

$$I = \int \vec{j} \cdot d\vec{S} = j \int d\vec{S} = jA \tag{4}$$

Para determinar j, ocupamos la ecuación para el potencial en (1), para lo cual se necesitan los campos eléctricos en cada material, los cuales vienen dados por la ley de Ohm:

$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{j}_1}{\sigma_1} = \frac{j}{\sigma_1}\hat{x} \qquad \vec{E}_2 = \frac{\vec{j}_2}{\sigma_2} = \frac{j}{\sigma_2}\hat{x} \tag{5}$$

Luego integrando con $d\vec{l} = dx\hat{x}$:

$$V_0 = V(0) - V(d) = -\int_d^{d_2} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} - \int_{d_2}^{0} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} = j\left(\frac{d_1\sigma_2 + d_2\sigma_2}{\sigma_1\sigma_2}\right) \tag{6}$$

Con $d = d_1 + d_2$. Por lo tanto reemplazando j de (4) se encuentra que la resistencia es:

$$R = \frac{V_0}{I} = \frac{1}{A}\left(\frac{d_1\sigma_2 + d_2\sigma_2}{\sigma_1\sigma_2}\right) \tag{7}$$

b) La densidad de carga σ_q en la interfaz de los materiales se va a deber a la carga libre σ_l y a la carga debido a la polarización de los materiales σ_p, con lo que se tiene:

$$\sigma_q = \sigma_l + \sigma_p \tag{8}$$

Primero se puede determinar la carga libre usando la ley de Gauss para dieléctricos e integrando sobre un cilindro en la interfaz (similar a lo que se hacía para un plano infinito):

$$\begin{aligned} \int \vec{D} \cdot d\vec{S} &= \int \sigma_l dS \\ (D_1 - D_2)S &= \sigma_l S \\ \sigma_l &= D_1 - D_2 \end{aligned}$$

Aquí D_1, D_2 salen de la integral porque son constantes, ya que como se tienen medios lineales $\vec{D}_i = \epsilon_i \vec{E}_i$ y $\vec{E}_i$ es constante porque $\vec{j}$ es constante. Aquí i denota los medios 1 y 2. Reemplazando en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} \sigma_l &= \epsilon_1 \vec{E}_1 - \epsilon_2 \vec{E}_2 \\ &= \left(\frac{\epsilon_1}{\sigma_1} - \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} \right) j \\ &= \left(\frac{\epsilon_1 \sigma_2 - \epsilon_2 \sigma_1}{d_1 \sigma_2 + d_2 \sigma_1} \right) V_0 \end{aligned} \tag{9}$$

donde se reemplazo j de (6). La densidad de polarización σ_p va estar dada por la polarización del material 1 y 2, con lo que se tiene en términos del vector de polarización:

$$\sigma_p = \vec{P}_1 \cdot \hat{n}_1 \Big|_{interfaz} + \vec{P}_2 \cdot \hat{n}_2 \Big|_{interfaz} \tag{10}$$

con $\hat{n}_1, \hat{n}_2$ las normales exteriores a los medios 1 y 2 respectivamente. Dado que son medios lineales el vector de polarización va a venir dado por:

$$\vec{P}_i = \epsilon_0 \chi_i \vec{E}_i = \epsilon_0 (k_i - 1) \vec{E}_i = (\epsilon_i - \epsilon_0) \frac{\vec{j}}{\sigma_i} \tag{11}$$

Reemplazando $\vec{j} = j\hat{x}$, con j obtenido de (6), se tiene que:

$$\vec{P}_1 = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_0)\sigma_2}{d_1 \sigma_2 + d_2 \sigma_1} V_0 \hat{x} \tag{12}$$

$$\vec{P}_2 = \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_0)\sigma_1}{d_1 \sigma_2 + d_2 \sigma_1} V_0 \hat{x} \tag{13}$$

Como $\hat{n}_1 = -\hat{x}$ y $\hat{n}_2 = +\hat{x}$, reemplazando en la ecuación (10) se obtiene que:

$$\sigma_p = -\frac{(\epsilon_1 \sigma_2 - \epsilon_2 \sigma_1) V_0}{d_1 \sigma_2 + d_2 \sigma_1} + \frac{\epsilon_0 (\sigma_2 - \sigma_1) V_0}{d_1 \sigma_2 + d_2 \sigma_1} \tag{14}$$

Comparando con la ecuación (9) se obtiene que la densidad de cargas en la interfaz va a venir dada por:

$$\sigma_q = \frac{\epsilon_0 (\sigma_2 - \sigma_1) V_0}{d_1 \sigma_2 + d_2 \sigma_1} \tag{15}$$

Problema 2

Se tienen 2 cascarones cilíndricos coaxiales de radios a y b, con $a < b$. Entre los cascarones se coloca un material con conductividad σ y permitividad ϵ. En $t = 0$ se coloca una carga por unidad de largo de Q_1 en el cilindro interior y Q_2 en el cilindro exterior. Asumiendo que Q_1 ¿Q_2 y que el medio es lineal:

a) La resistencia por unidad de largo entre los cilindros.

b) La carga por unidad de longitud en el cilindro interior como función del tiempo.

c) La corriente por unidad de longitud en el cilindro interior.

Solución

a) Para calcular la resistencia podemos ocupar $R = V/I$, donde V e I van a estar dados por:

$$I = \int \vec{j} \cdot d\vec{S} \qquad V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{S} \qquad \vec{j} = \sigma\vec{E} \tag{16}$$

La corriente fluye desde el cilindro interior al exterior porque $Q_1 > Q_2$, ya que la corriente se mueve de mayor a menor potencial, si además consideramos la simetría del problema se puede decir que la densidad de corriente toma la forma $\vec{j} = j(r)\hat{r}$. Tomando como superficie para integrar I un manto de cilindro de largo L y radio r se tiene que:

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{L} j(r)\hat{r} \cdot rdzd\phi\hat{r} = j(r) \cdot 2\pi r \tag{17}$$

Por lo tanto:

$$j(r) = \frac{I}{2\pi r L} \tag{18}$$

El potencial se determina usando la ley de Ohm $\vec{j} = \sigma\vec{E}$, entonces:

$$V = V(a) - V(b) = -\int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \frac{j(r)}{\sigma}\hat{r} \cdot dr\hat{r} = \frac{I}{2\pi\sigma L}\ln(b/a) \tag{19}$$

Reordenando un poco los términos se encuentra que la resistencia viene dada por:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\ln(b/a)}{2\pi\sigma L} \tag{20}$$

b) Para encontrar como varía Q_1 en función del tiempo, primero partimos encontrando una relación para Q_1 mediante la ley de Gauss para dieléctricos. Considerando que se tiene un medio lineal, entonces $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$. Si ocupamos como superficie de integración un cilindro, se tiene que:

$$\int \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{libre}$$
$$\int_0^{2\pi} \int_0^L \epsilon E r dz d\phi = Q_1$$
$$\frac{\epsilon}{\sigma} \frac{I}{2\pi r L} \cdot 2\pi L = Q_1$$

Donde se uso que $j = \sigma E$. Por lo tanto se encuentra que:

$$I = \frac{\sigma}{\epsilon} Q_1 \tag{21}$$

La variación de carga en el cilindro interior va a estar dada por dQ_1/dt. Esta variación de carga es igual a la corriente que atraviesa el cilindro que se uso para el calculo interior, entonces se tiene que:

$$\frac{dQ_1}{dt} = -I = -\frac{\sigma}{\epsilon} Q_1 \tag{22}$$

donde el signo menos aparece porque la carga en el cilindro se pierde, por lo tanto la derivada debe ser negativa y esa perdida es igual a la corriente que atraviesa la superficie. Resolviendo la ecuación diferencial de arriba se encuentra que la corriente es:

$$Q_1(t) = Q_1(0)\exp\left(-\frac{\sigma t}{\epsilon}\right) \tag{23}$$

c) Simplemente reemplazamos el $Q_1(t)$ recién obtenido en la ecuación (21), con lo que se tiene:

$$I = \frac{\sigma}{\epsilon} Q_1(0)\exp\left(\frac{-\sigma t}{\epsilon}\right) \tag{24}$$

Problema 3

Calcular las resistencias equivalentes de los circuitos que se muestran en las figuras 2 y 3.

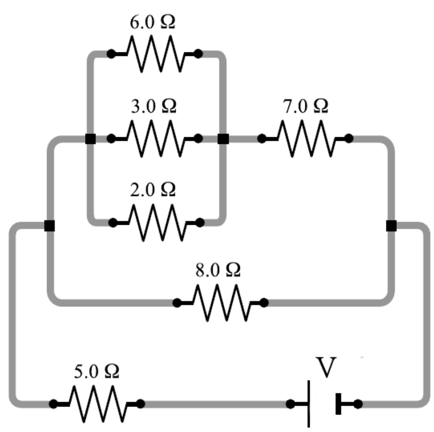

Figura 2:

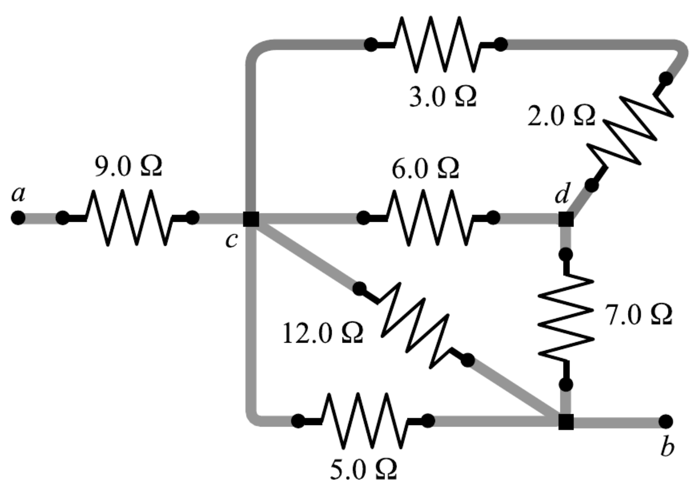

Figura 3:

Solución

- **Figura 2:** Las resitencias equivalentes en cada caso se van a escribir con una barra. Nombrando las resistencias como:

$$
\begin{array}{lll}
R_1 = 6\Omega & R_3 = 2\Omega & R_5 = 8\Omega \\
R_2 = 3\Omega & R_4 = 7\Omega & R_6 = 5\Omega
\end{array}
$$

Las resistencias R_1, R_2, R_3 están en paralelo, por lo que las podemos reducir a:

$$\bar{R}_1 = \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right]^{-1} = 1\Omega \tag{25}$$

Esta nueva resistencia $\bar{R}_1$ queda en serie con la resistencia R_4, por lo tanto estas se reducen a:

$$\bar{R}_2 = \bar{R}_1 + R_4 = 8\Omega \tag{26}$$

Ahora $\bar{R}_2$ queda en paralelo con la resistencia R_5, las que se reducen a:

$$\bar{R}_3 = \left[\frac{1}{\bar{R}_2} + \frac{1}{R_5}\right]^{-1} = 4\Omega \tag{27}$$

Por último esta resistencia $\bar{R}_3$ queda en serie con la resistencia R_6, por lo tanto la resistencia equivalente viene dada por:

$$R_{eq} = \bar{R}_3 + R_6 = 9\Omega \tag{28}$$

- **Figura 3:** nuevamente las resitencias equivalentes en cada caso se van a escribir con una barra. Nombrando las resistencias ahora como:

$$
\begin{array}{llll}
R_1 = 9\Omega & R_3 = 2\Omega & R_5 = 12\Omega & R_7 = 5\Omega \\
R_2 = 3\Omega & R_4 = 6\Omega & R_6 = 7\Omega &
\end{array}
$$

Las resistencias R_2, R_3 van a estar en serie, con lo que se reducen a:

$$\bar{R}_1 = R_2 + R_3 = 5\Omega \tag{29}$$

Esta nueva resistencia $\bar{R}_1$ queda en paralelo con R_4, luego se reducen:

$$\bar{R}_2 = \left[\frac{1}{\bar{R}_1} + \frac{1}{R_4}\right]^{-1} = 2,73\Omega \tag{30}$$

La nueva resistencia $\bar{R}_2$ queda en serie con R_6, luego:

$$\bar{R}_3 = \bar{R}_2 + R_6 = 9,73\Omega \tag{31}$$

Ahora queda que $\bar{R}_3$ queda en paralelo con R_5, R_7, con lo que se tiene:

$$\bar{R}_4 = \left[\frac{1}{\bar{R}_3} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_7}\right]^{-1} = 2,6\Omega \tag{32}$$

Finalmente quedan R_1 y $\bar{R}_4$ en serie, por lo tanto la resistencia equivalente es:

$$R_{eq} = R_1 + \bar{R}_4 = 11,6\Omega \tag{33}$$